

Gram-Schmidt Eşlenik Yön ve Eşlenik Gradyan Algoritmalarının Adaptif Antenlere Uygulanması

Şevket GÖĞÜSDERE¹, Haydar KAYA², Yasin OĞUZ¹
Karadeniz Teknik Üniversitesi,
Enformatik Bölümü¹,
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü²,
61080 Trabzon, TÜRKİYE
e-posta: sevket@ktu.edu.tr, hkaya@ktu.edu.tr, oгуzy@ktu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Adaptif Antenler, Uzaysal Süzgeçleme, Adaptif Algoritmalar

ABSTRACT

The rapid growth in demand for cellular mobile communications and emerging fixed wireless access has created the need to increase system capacity through more efficient utilization of the frequency spectrum, and the need for better grade of service. In cellular systems, capacity improvement can be achieved by reducing co-channel interference. Several techniques have been proposed in literature for mitigating co channel interference, such as adaptive antennas and power control. In this paper, we consider the implementation and performance of two adaptive array algorithms which is Gram-Schmidt Conjugate Direction (GSCD) and Conjugate Gradient (CG), based on training sequence, used in adaptive arrays.

1. GİRİŞ

En Küçük Ortalama Kareler (LMS) ve Özyinelemeli En Küçük Kareler (RLS) algoritması en çok kullanılan adaptif algoritmalar. $\mathbf{R}\mathbf{w}=\mathbf{b}$ tipindeki sonlu lineer denklem sistemini çözmek için RLS algoritmasından yararlanılabilir. Bu denklemde \mathbf{R} bilinen Hermitian bir matris, \mathbf{b} bilinen bir vektör, \mathbf{w} bilinmeyen bir vektördür. Ancak RLS algoritması çok fazla hesaplama karmaşıklığına sahiptir. Ayrıca RLS algoritması sayısal olarak kararsız bir yapıya eğilim göstermektedir. Öte yandan, matris tersi alma ve kararlılık gibi sorunlardan kaçınmak için diğer adaptif yöntemlerden yararlanılabilir.

Eşlenik Gradyan (CG) yöntemi gibi eşlenik tipi algoritmalar lineer denklem sistemlerini iteratif yoldan çözerler[1]. Son zamanlarda Genişbandlı Kod Bölmeli Çoklu Erişim (WCDMA) sisteminde çok kullanıcı algılama ve gezgin kullanıcı izleme sistemleri gibi bir çok uygulamalarda kullanılmaktadır [2,3,4].

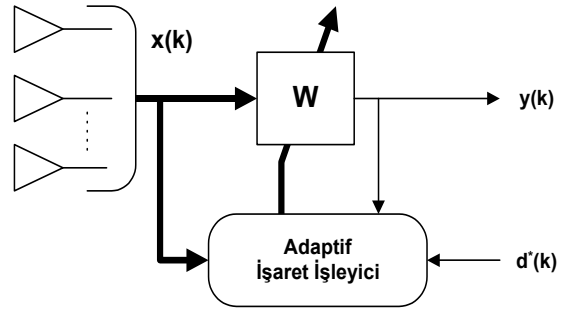
Bu çalışmada Gram-Schmidt Eşlenik Yönler (GSCD) ve Eşlenik Gradyan (CG) algoritmalarının yakınsama özellikleri ve hesaplama karmaşıklıkları incelenerek performansları karşılaştırılmıştır.

2. IŞIN DEMETİ OLUŞTURMA VE UZAYSAL SÜZGEÇLEME

Adaptif anten sistemi, yapılarına ve ışın demeti oluşturma yöntemine göre sınıflandırılmaktadır. Bu çalışmada, istatistiğe dayalı en uygun ışın demeti oluşturma yöntemi incelenmiştir. Şekil 1’de verilen adaptif anten modeli, uzaysal örnekleme yöntemiyle darbandlı işaretlerin işlenmesi için kullanılır. N anten elemanından oluşan bir adaptif anten dizisinin, k anındaki $y(k)$ çıkışı,

$$y(k) = \sum_{i=1}^K w_i^* x_i(k) \quad (1)$$

olarak verilir. Bir çok uygulamalarda hem faz hem de dördün (I ve Q) veriyi işlemek için genelde dördün evreli alıcılar kullanıldığından, hem işaret hem de ağırlıklar karmaşık büyüklüklere sahiptir.



Şekil 1. Adaptif ışın demeti oluşturma sistemi

Şekilde görüldüğü gibi antenlerde \mathbf{w} karmaşık ağırlıklar, adaptif kontrol işlemcisi tarafından ayarlanır. Burada $d(k)$ referans işaretine göre ışın demeti oluşturulmaktadır. Eğer istenen işaret (eğitim işareti) biliniyorsa, dizi çıkışı ile $d(k)$ referans işareti arasındaki ortalama karesel hatayı (MSE) en küçük yapacak şekilde ağırlıklar belirlenir [5].

İstatistiğe dayalı adaptif algoritmalarda en uygun ağırlık vektörü aşağıdaki denklemle bulunur.

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{b}} \quad (2)$$

Bu çözüme Wiener çözümü denir[6]. Bu denklemde, \mathbf{R} giriş öz-ilişki matrisi, \mathbf{b} çapraz-ilişki vektörü olup aşağıda verilen bağıntılarla hesaplanırlar.

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) d^*(k) \quad (4)$$

Bu yöntem, çok-yollu ortamda istenen işaretin bastırılma olasılığını ortadan kaldırmakta, istenen işaret ile girişim işaretlerinin anten dizisine geliş açılarının bilinmesine gerek duymamaktadır. Yöntemin olumsuz yanı ise ağırlıkların belirlenmesi için eğitim işaretine gereksinim duyulmasıdır.

3. ALGORİTMALAR

Burada çalışılan iki algoritma da genel Eşlenik Yöner (CD) yöntemini temel almaktadır. Bu algoritmalarda genel yaklaşım, ortogonal arama yönlerini bulmak ve her iterasyonda bir arama yönü boyunca hatayı en aza indirmektir. Sonuçta en fazla N adımda denklem sisteminin yakınsak bir çözümü elde edilir.

Genel CD yöntemi ortogonal arama yönlerinin nasıl bulunacağıyla ilgilenmez. Bu nedenle, arama yönlerini belirlemek için genel yöntem içinde çeşitli algoritmalarından yararlanır.

3.1. GRAM-SCHMİDT EŞLENİK YÖNLER ALGORİTMASI

GSCD algoritmasında R-ortogonal $\mathbf{p}(n)$ arama yönlerini bulmak için bilinen Gram-Schmidt ortogonalizasyon yönteminin R-eşlenik değişkeni kullanılır. Sonuçta elde edilen algoritma aşağıda verildiği gibidir.

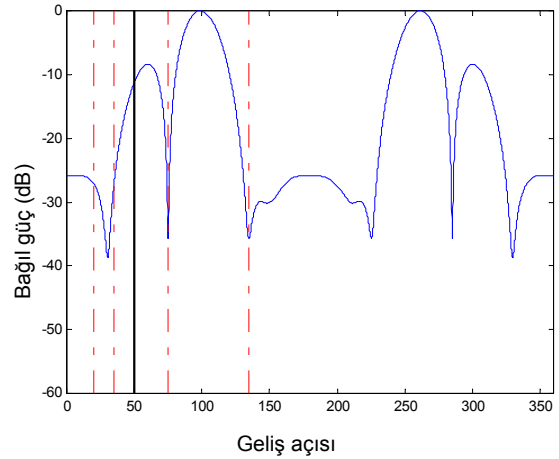
$$\begin{aligned} \mathbf{w}(0) &= \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{g}(0) = \mathbf{b} \\ \mathbf{p}(1) &= \mathbf{g}(0) \quad , \quad n = 1 \\ \text{while } n &\leq N \\ \alpha(n) &= \frac{\mathbf{p}(n)^T \mathbf{g}(n-1)}{\mathbf{p}(n)^T \mathbf{R} \mathbf{p}(n)} \\ \mathbf{w}(n) &= \mathbf{w}(n-1) + \alpha(n) \mathbf{p}(n) \\ \mathbf{g}(n) &= \mathbf{g}(n-1) - \alpha(n) \mathbf{R} \mathbf{p}(n) \\ \mathbf{p}(n+1) &= \mathbf{g}(n) - \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{g}(n)^T \mathbf{R} \mathbf{p}(k)}{\mathbf{p}(k)^T \mathbf{R} \mathbf{p}(k)} \mathbf{p}(k) \\ n &= n + 1 \\ \text{end} \end{aligned}$$

N adımlık her bir iterasyondan sonra $\mathbf{w}(n)$ yeni ağırlık vektörü, $\mathbf{g}(n)$ rezidü hatası minimum olan $\mathbf{p}(1), \dots, \mathbf{p}(n)$ mevcut yönlerin lineer kombinasyonu şeklinde

hesaplanır. Bir sonraki arama yönü ise Gram-Schmidt ortogonalizasyon adımını rezidü hata vektörüne uygulayarak hesaplanır. N arama yönü bütün vektör uzayını içerdiğinden, bu algoritma en fazla N adımda çözüme yakınsar.

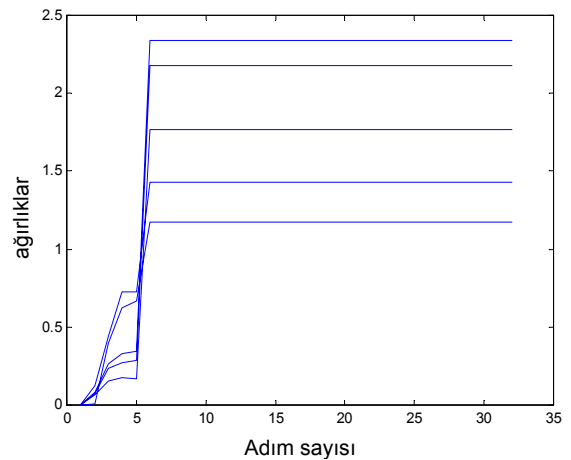
Şekil 2' de GSCD algoritması yardımıyla 5 anten elemanlı (N=5) bir adaptif anten sisteminin oluşturduğu ışına örüntüsü görülmektedir. Burada 20°, 35°, 75° ve 135° de komşu kanal girişimleri, 50° de ise istenilen işaret vardır. Burada ağırlıkların bulunması için gerekli eğitim işaret 31 sembollük PN dizisi olup kullanılan modülasyon QPSK' dır.

Şekilden, algoritmanın komşu kanal girişimleri için istenen sıfırları ürettiği ancak anten eleman sayısı yeterli olmadığından maksimum ışınmayı istenen işaret yönünde oluşturamadığı görülmektedir.



Şekil 2. GSCD ile elde edilmiş ışına örüntüsü

Şekil 3' de ise GSCD algoritmasının ağırlıklarının adım sayısına göre değişimi verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi, 5 elemanlı dizi için GSCD algoritması 5 adımda çözüme yakınsamıştır.



Şekil 3. GSCD ile elde edilmiş ağırlıkların adım sayısına göre değişimi

3.2. EŞLENİK GRADYAN ALGORİTMASI

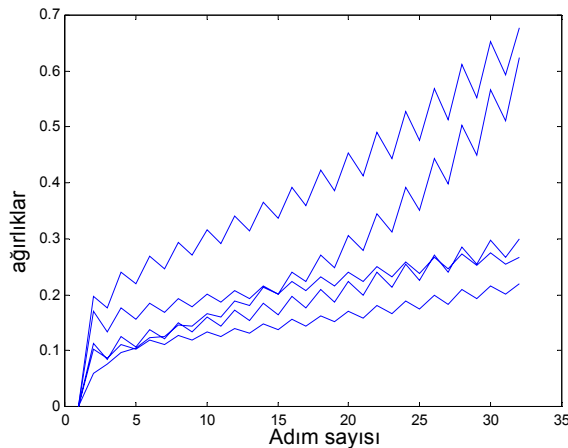
CG algoritmasında yeni arama yönü bir önceki arama yönüne R-eşlenik olacak şekilde seçilir. Bundan dolayı GSCD algoritmasındaki Gram-Schmidt ortogonalizasyon adımına göre karşılaştırıldığında çok daha az karmaşıklığa sahiptir. Sonuçta elde edilen CG algoritması aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(0) &= \mathbf{0}, \mathbf{g}(0) = \mathbf{b}, \rho(1) = \mathbf{g}(0)^T \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{p}(1) &= \mathbf{g}(0), n = 1 \\ \text{while } n &\leq N \\ &\alpha(n) = \frac{\rho(n)}{\mathbf{p}(n)^T \mathbf{R} \mathbf{p}(n)} \\ \mathbf{w}(n) &= \mathbf{w}(n-1) + \alpha(n) \mathbf{p}(n) \\ \mathbf{g}(n) &= \mathbf{g}(n-1) - \alpha(n) \mathbf{R} \mathbf{p}(n) \\ \rho(n+1) &= \mathbf{g}(n)^T \mathbf{g}(n) \\ \beta(n) &= \frac{\rho(n+1)}{\rho(n)} \\ \mathbf{p}(n+1) &= \mathbf{g}(n) + \beta(n) \mathbf{p}(n) \\ n &= n+1 \end{aligned}$$

end

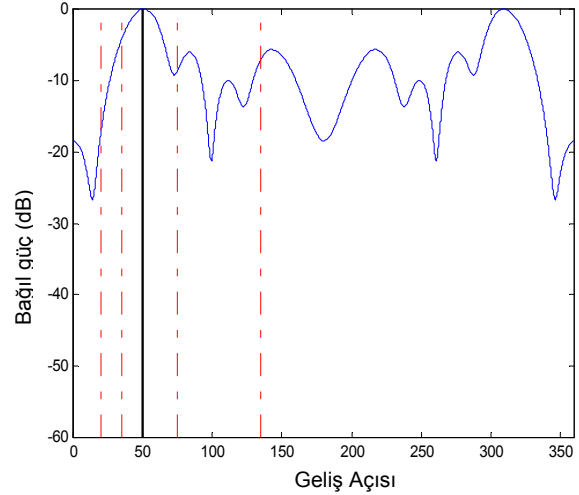
Bu algoritmada $\alpha(n)$, $\mathbf{p}(n)$ arama yönü boyunca maliyet fonksiyonunu en küçük yapacak adım büyüklüğüdür. Ayrıca $\alpha(n)$, $\mathbf{w}(n)$ ağırlık vektörünü güncellemek için kullanılır. $\mathbf{g}(n)$ ise fonksiyonun rezidüsü olup dik inişin (steepest descent) yönünü gösterir. $\mathbf{w}(n)$ yeni ağırlık vektörü bir önceki ağırlık vektörünün ve arama yönünün toplamıdır. CG algoritmasında $\beta(n)$ faktörü, yeni arama yönleri arasında R-ortogonalliğini korumayı sağlamaktadır.

Şekil 4' de ağırlıkların adım sayısına göre değişimi verilmiştir. Şekilden, ağırlık katsayılarının 31 adımda belli bir değere yakınsadığı görülmektedir.



Şekil 4. CG ile elde edilmiş ağırlıkların adım sayısına göre değişimi

Şekil 5'de ise şekil 4'deki ağırlık katsayıları kullanılarak oluşturulan anten ışınma örüntüsü görülmektedir. Giriş parametreleri GSCD algoritmasındaki giriş parametreleri ile aynıdır. Şekilden de görüldüğü gibi CG algoritması girişim işaretlerini tam bastıramamaktadır.



Şekil 5. CG ile elde edilmiş ışınma örüntüsü

Teorik olarak CG algoritması en fazla N adımda çözüme yaklaşmasına rağmen, uygulamada yuvarlama hatalarından dolayı her zaman yakınsak çözüm elde edilemeyebilir. Ayrıca yakınsama hızı başlangıç koşullarının lineer denklem sistem çözümüne ne kadar yakın olduğuna da bağlıdır. Diğer taraftan GSCD algoritması daima N adımda yakınsamaktadır.

3.3. HESAPSAL KARMAŞIKLIK

Bu kısımda CG ve GSCD algoritmalarının hesapsal karmaşıklığı incelenmiştir. Bu hesaplamalarda bir bölme işlemi bir çarpma işlemiyle aynı karmaşıklığa sahiptir. Burada sadece çarpımların sayısı ele alınmıştır. Çünkü çarpma işlemi toplama işleminden çok daha karmaşıktır[7]. GSCD algoritmasında $\mathbf{p}(n)$ yeni atama yönünün hesaplanması çok daha karmaşık ve çok daha yüksek vektör iç çarpım işlem sayısı gerektirir. Tablo 1' de algoritma türüne göre çarpım işlem sayısını hesaplayan bağıntılar verilmiştir.

Algoritma	Çarpım sayısı
CG	$K(N^2+5N+2)-2N-1$
GSCD	$K(N^2+2N+K(2N+1))-N$

Tablo 1. Algoritmaların hesapsal karmaşıklıkları

Bu hesaplamalarda $\mathbf{w}(0)$ başlangıç ağırlık vektörü sıfıra eşitlenmiştir. Her iki algoritmada başlangıç ağırlık vektörü sıfırdan farklı bir değer alıyorsa rezidü (5) denklemiyle hesaplanır. Bundan dolayı da çarpma sayısı N^2 kadar artar.

$$\mathbf{g}(0) = \mathbf{b} - \mathbf{R}\mathbf{w}(0) \quad (5)$$

Hesapsal karmaşıklık her iki algoritmada da K iterasyon sayısına bağlıdır. Böylece GSCD algoritmasında $\mathbf{p}(n)$ yeni arama yön vektörünün hesaplanması, mevcut $\{\mathbf{p}(1), \mathbf{p}(2), \dots, \mathbf{p}(n)\}$ arama yönlerini gerektirdiği için, GSCD algoritması CG algoritmasına göre K iterasyon sayısına daha fazla bağlıdır.

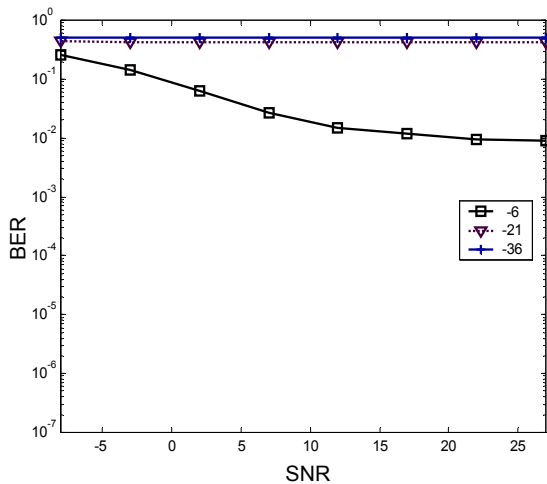
4. BER SONUÇLARI

Adaptif anten sistemi, alınan işaretin işaret/(girişim+gürültü) oranını (SINR) en büyük yapmak için kullanılır. Diğer taraftan sayısal kablosuz haberleşmede bit hata oranına (BER) bakılarak iletişimin niteliği daha kolay değerlendirilebilmektedir. Bu çalışmada, lineer dizi ve sayısal ışın demeti oluşturucusundan oluşmuş bir adaptif anten sisteminin, girişimleri bastırmak için kullandığı adaptif algoritmaların performansları BER cinsinden değerlendirilmiştir.

Yapılan benzetimlerde kanalın Rayleigh dağılımlı ve dar-bantlı olduğu kabul edilmiştir. Kullanılan temel band modülasyonu QPSK olup, sistemdeki gürültünün 0.01 varyanslı karmaşık Gauss dağılımına sahip olduğu varsayılmıştır. Adaptif anten sistemi 5 anten elemanından oluşmaktadır. Sisteme 20° , 35° , 75° ve 135° den komşu kanal girişim işaretlerinin, 50° den ise istenen işaretin geldiği varsayılmaktadır.

Şekil 6' da CG algoritması kullanılarak -6,-21 ve -36 dB'lik işaret/girişim (SIR) değerleri için, hesaplanan BER değerlerinin işaret/gürültü (SNR) değerine göre değişimleri verilmiştir.

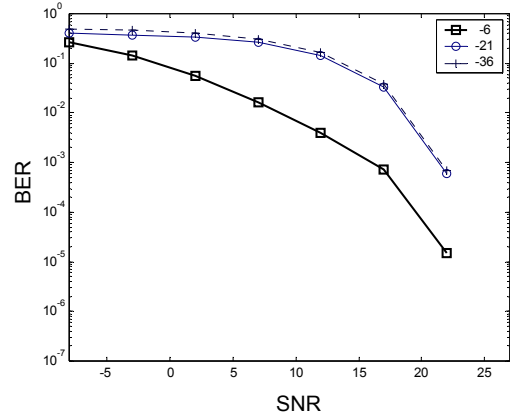
Şekilden de görüldüğü gibi, CG algoritması -21 ve -36 dB'lik SIR değerleri için, SNR ne olursa olsun aynı BER değerleridir.



Şekil 6. CG algoritmasıyla farklı SIR değerleri için hesaplanan BER'in SNR'ye göre değişimi

Şekil 7' de ise GSCD algoritması kullanılarak -6,-21 ve -36 dB'lik SIR değerleri için hesaplanan BER'in SNR ile değişimi verilmiştir.

Şekilden de görüldüğü gibi GSCD algoritması CG algoritmasına göre çok daha iyi sonuçlar vermiştir.



Şekil 7. GSCD algoritmasıyla farklı SIR değerleri için hesaplanan BER'in SNR'ye göre değişimi

5. SONUÇ

Bu çalışmada Gram-Schmidt Eşlenik Yön ve eşlenik Gradyan algoritmalarının adaptif antenlere uygulanması ele alınmıştır. Teorik olarak CG algoritmasının en fazla N adımda çözüme yaklaşması beklenir. Ancak uygulamada yuvarlama hatalarından dolayı N adımda çözüme ulaşamamaktadır. Bu nedenle ya uygun bir başlangıç noktasının seçilmesi ya da adım sayısının artırılması gerekmektedir. GSCD algoritması ise her zaman en fazla N adımda çözüme yakınsamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1]. M. R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of conjugate gradients for solving linear systems," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. Vol.49, No. 6, pp. 409-436, December 1952.
- [2]. M. Juntti, B. Aazhang and J. O. Lilleberg, "Iterative implementation of linear multiuser detection for dynamic asynchronous CDMA systems," *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 46, No. 4, pp. 503-508, April 1998.
- [3]. S. Das, J. R. Cavallaro and B. Aazhang, "Computationally efficient multiuser detectors," in *Proc. IEEE Int. Symp. Personal, Indoor and Mobile Radio Commun.*, Vol. 1, pp. 62-67, Helsinki, Finland, Sept. 1-4, 1997.
- [4]. P. Karttunen, R. Baghaie, "Conjugate gradient based signal subspace mobile user tracking," to appear in *Proc. VTC*, May 1999.

- [5]. Göğüsdere Ş., Kaya H., Oğuz Y., “Adaptif Antenlerde DLMS Algoritmasının Çalışma Bölgesi ve Başarımı”, SIU 2002, Cilt 1, s. 418-423, Haziran 2002
- [6]. Haykin S., Adaptive Filter Theory, Prentice Hall, Englewood, New Jersey, 1991.
- [7]. T. Callaway and E. Swartzlander, “Optimizing arithmetic for signal processing,” in *Proc. IEEE Workshop on VLSI Signal Processing, V*, Napa Valley, California, pp. 91-100, October 1992.